

**Florica Banu ■ Gabriel Dospinescu ■ Mircea Farcaș
Valeriu Gornoavă ■ Andrei Ismail ■ Gheorghe Iurea ■ Ovidiu Pop
Călin Popa ■ Gabriel Popa ■ Dinu Șerbănescu ■ Ioan Șerdean
Marian Tetiva ■ Adrian Zahariuc ■ Adrian Zanoschi**

**Z. Blajovan ■ G. Busuioc ■ I. Cheșcă ■ C. Chiteș ■ G. Constantinescu
T. Cristea ■ A. Ghioca ■ N. Gruia ■ O. Horelu ■ R. Ilie ■ D. Linț ■ D. Matei
R. Mihăilescu ■ Gh. Molea ■ V. Nechita ■ I. Pătrașcu ■ M. Pop ■ D. Popescu
E. Șchiopu ■ E. Sitaru ■ Șt. Smărăndoiu ■ I. Trifon ■ O. Ungureanu
P. Vlad ■ J. Watkins ■ V. Zidaru**

OLIMPIADELE DE MATEMATICĂ

**2003
CLASELE VII-VIII**

CUPRINS

(E = enunțuri, S = soluții)

	E	S
Argument	3	
CLASA a VII-a		
I. Olimpiada națională de matematică: etapa locală	5	83
II. Olimpiada națională de matematică: etapa județeană	24	96
III. Olimpiada națională de matematică: etapa finală	24	98
IV. Concursuri interjudețene	25	99
CLASA a VIII-a		
I. Olimpiada națională de matematică: etapa locală	37	115
II. Olimpiada națională de matematică: etapa județeană	57	140
III. Olimpiada națională de matematică: etapa finală	57	141
IV. Concursuri interjudețene	58	143
CONCURSURI		
Algebră	70	163
Inegalități	72	167
Teoria numerelor și aritmetică	74	173
Combinatorică	76	176
Geometrie	78	181
Teste de selecție pentru a 7-a Olimpiadă Balcanică de matematică pentru juniori	80	186
A 7-a Olimpiadă Balcanică de matematică pentru juniori Turcia	82	190

I. Olimpiada națională de matematică: etapa locală

ALBA

I. a) Să se afle numerele x din egalitatea:

$$\frac{2,4 - \sqrt{4,1616}}{0,2} = \frac{(2 \cdot \sqrt{2})^2 + 2^2}{5 : \sqrt{\frac{1}{x^2 - 1}}}$$

b) Găsiți cifrele x astfel încât numărul $\frac{1}{0,(x)} + \frac{1}{0,0(0x)}$ să fie natural.

II. a) Demonstrați că dacă $x + y = -2002$, unde $x, y \in \mathbb{R}$ atunci are loc inegalitatea:

$$|x + 9| + |10 - y| \geq 2003.$$

b) Calculați

$$2^{2003} \cdot \left[2 - 6 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{2^{2003}} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2002}} \right) \right].$$

III. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$ și diagonalele perpendiculare. Arătați că $AB + CD < AD + BC$.

IV. În triunghiul ABC , "în care" $AB = 10$ cm, $BC = 11$ cm, $AC = 12$ cm, se consideră A' , B' , C' respectiv mijloacele segmentelor $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$ și AA_1 , BB_1 , CC_1 bisectoarele unghiurilor triunghiului, $A_1 \in (BC)$, $B_1 \in (AC)$, $C_1 \in (AB)$.

a) Dacă $AA' \cap BB' = \{G\}$ și $AA_1 \cap CC_1 = \{I\}$, demonstrați că $GI \parallel BC$.

b) Dacă $BB' \cap CC_1 = \{M\}$ și $CC' \cap BB_1 = \{N\}$, demonstrați că M , N , A' sunt coliniare.

ARAD

I. Fie $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$ astfel încât $m - p \mid mn + pq$. Demonstrați că $m - p \mid mq + np$.

II. Să se arate că ecuația $x^2 + 3y^2 - 3x + 3y - 3 = 0$ nu are soluții întregi.

III. Fie suma $S = \frac{1}{1\sqrt{3} + 3\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(2k+1)\sqrt{2k+3} + (2k+3)\sqrt{2k+1}}$.

Calculați suma. Pentru ce valori ale lui k naturale $\frac{1}{1-2S} \in \mathbb{N}$?

IV. Fie M, N mijloacele laturilor DC și AD ale pătratului $ABCD$ și $CN \cap BM = \{P\}$.

Demonstrați că :

a) $BM \perp CN$.

b) triunghiul APB este isoscel.

6 Olimpiada națională de matematică: etapa locală

- V. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$ cu $AD=BC=DC=m$ și măsura unghiului A de 60° . Fie MN linia mijlocie, $M \in AD$, care se intersectează cu diagonalele în P și Q , $P \in AC$.
- a) Arătați că triunghiul DEQ este echilateral unde $DE \perp AB$, $E \in AB$.
- b) Arătați că $DP \perp EQ$.
- c) Dacă $AC = a$, calculați perimetrul patrulaterului $DMEQ$, $m > \frac{a}{2}$.

ARGEȘ

- I. a) Să se arate că dacă $\sqrt{234abc} \in \mathbb{N}$, atunci și $\sqrt{abc} \in \mathbb{N}$.
- b) Determinați patru numere naturale x , pentru care $x + \sqrt{12 \cdot (x-3)}$ sunt naturale.
- II. Fie $A = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$. Arătați că: $0,2 < \sqrt{\frac{A}{11}} < 0,3$.

Gh. Molea

- III. Fie triunghiul ABC și $D \in (BC)$ astfel ca să avem simultan condițiile: $AD = CD$; $AC = 2 \cdot AB$; $BC = 3(CD - BD)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

I. Safta

- IV. În triunghiul ABC , $m(\hat{A}) = 90^\circ$, $m(\hat{B}) = 60^\circ$, $AD \perp BC (D \in BC)$, $DE \perp AC (E \in AC)$ și $F \in (DE)$. Să se demonstreze că:
- a) $2 \cdot DE = 3 \cdot BD$;
- b) $AF \perp BE$ dacă și numai dacă $DE = 4 \cdot EF$.

P. Ruja

BACĂU

- I. a) Să se compare numerele: $(2k-1)^2(3k+1)$ și $(2k)^2(3k-2)$, pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$.
- b) Să se arate că $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{65}{66} < \frac{1}{10}$.
- II. a) Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuația: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$.
- b) Există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{m}{3} + \frac{n}{5} = 1$?
- c) Câte soluții are ecuația $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = p$, unde $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, p dat, $x, y \in \mathbb{N}^*$.

III. Fie a și b două numere naturale astfel încât $2 < b < a < \frac{3}{2}b$.

a) Dovediți că există un triunghi cu lungimile laturilor a^2 , ab , b^2 .

b) Arătați că există cel puțin două triunghiuri având lungimile laturilor numere naturale, asemenea cu triunghiul de la punctul a), necongruente, cu două perechi de laturi congruente.

IV. Fie O un punct interior triunghiului ABC . Paralela prin O la BC intersectează pe AB în S și pe AC în P , paralela prin O la AC intersectează pe BC în N și pe AB în R , paralela prin O la AB intersectează pe AC în Q și pe BC în M . Demonstrați că:

a) $\frac{MN}{BC} + \frac{PQ}{CA} + \frac{RS}{AB} = 1$.

b) Dacă $\frac{MN}{BC} = \frac{PQ}{CA} = \frac{RS}{AB}$ atunci O este centrul de greutate al triunghiului ABC .

BIHOR

I. Fie $S = \overline{a, b(c)} + \overline{b, c(a)} + \overline{c, a(b)}$ unde a, b, c sunt cifre nenule ale sistemului

zecimal invers proporționale cu $\frac{1}{1+bc}$, $\frac{1}{1+ca}$, $\frac{1}{1+ab}$. Aflați a, b, c știind că S este un număr natural.

Romulus Pleșa, Viorica Pleșa

II. a) Arătați că între numerele 2^{2n+3} și $12 \cdot 4^n$ există cel puțin un pătrat perfect, $\forall n \in \mathbb{N}$. Scrieți un pătrat perfect cuprins între aceste numere.

b) Arătați că $179^{n+3} + 314^{n+5}$ nu este pătrat perfect, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Florin Nicoară

III. Aflați numerele naturale $x, y, z, t, u, v \in \mathbb{N}^*$, știind că $\frac{x}{t} = \frac{y}{u} = \frac{z}{v}$, $x < y < z$,

$$91 \leq x + y + z \leq 109, t \geq 2 \text{ și } tuv - t^2v = 10.$$

Călin Ardelean

IV. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC . Se prelungesc segmentele $[AG]$, $[BG]$, $[CG]$ cu segmentele $[GM] \equiv [AG]$, $[GN] \equiv [BG]$, respectiv $[GP] \equiv [CG]$.

Arătați că:

a) $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$;

b) $ABMN$, $BCNP$ și $CAPM$ sunt paralelograme;

c) $AB + BC + CA < 3 \cdot (GM + GN + GP) < 2 \cdot (AB + BC + CA)$.

Romulus Pleșa, Viorica Pleșa

BISTRIȚA-NĂSĂUD

I. Fie mulțimile: $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{3x+6}{2x+9} \in \mathbb{Z} \right\}$ și $B = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{6}{2x+1} \in \mathbb{Z} \right\}$. Să se calculeze:

$$A \cup B, A \cap B, A - B, B - A.$$

II. Să se rezolve ecuația: $x + 2x + 3x + 4x + \dots + 2003x = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 167 \cdot 2003$.

III. Arătați că în triunghiul ABC scalen cu lungimile laturilor $a > b > c$ are loc inegalitatea:

$$abc > a^2(b-c) + c^2(a-b) - b^2(a-c).$$

IV. În trapezul $ABCD$ ($AB \parallel CD$) se știu: $BC = 10\text{cm}$; $M \in (AD)$; $N \in (BC)$,

$$DM = 2\text{cm}; AD = 5\text{cm}; BC = 10\text{cm}; NB = 6\text{cm}; AB = 9\text{cm}; AC \cap MN = \{P\} \text{ și } AD \cap BC = \{Q\}.$$

a) Demonstrați că $MN \parallel AB$.

b) Calculați DC și AQ știind că B, P și D sunt coliniare.

BRAȘOV

I. a) Arătați că $\sqrt{2001+2+4+6+\dots+4000} \in \mathbb{N}$.

$$b) \sqrt{\frac{111\dots1}{2n \text{ cifre}} - \frac{222\dots2}{n \text{ cifre}}} \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*.$$

II. Aflați numerele naturale prime a, b și c care verifică egalitatea

$$a + 5b + 10c = a \cdot b \cdot c.$$

Aurel Bârsan

III. În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$, fie $AC \cap BD = \{O\}$. Paralela prin O la AB intersectează pe AD în M și pe BC în N . Notăm $AB = x$ și $CD = y$.

a) Să se demonstreze că $OM = ON$;

$$b) \text{ Să se arate că } MN = \frac{2xy}{x+y}.$$

IV. În triunghiul ABC , fie $P \in (AB)$ și $E \in (AC)$, astfel încât $PE \parallel BC$ și

$3 \cdot AP = 2 \cdot AB$. Fie M , mijlocul lui (AC) și $PE \cap BM = \{S\}$. Arătați că S este centrul de greutate al triunghiului ABC .

Camelia Postolache

I. Arătați că:

a) dacă $x \in \mathbb{R}$ astfel încât x^{16} și x^* sunt numere raționale, atunci $x \in \mathbb{Q}$;

Mircea Fianu

b) $\frac{a^2 + 1}{b^3 - b} \notin \mathbb{Z}, \forall a, b \in \mathbb{Z}, |b| \geq 2$.

Daniela Chiteș

II. Fie $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2002} - \frac{1}{2003}$ și $y = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2001} - \frac{1}{2002}$.

a) Calculați media aritmetică a numerelor x și y .

b) Arătați că $x < \frac{1001}{2003} < y$.

Petre Simion

III. Fie triunghiul ABC , bisectoarea $[BE, E \in (AC)]$, $P \in (BE)$ și N astfel ca $CP \cap AB = \{N\}$ și $\frac{PC}{PN} - 2 \cdot \frac{PE}{PB} = 1$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

Traian Preda

IV. Fie triunghiul ABC echilateral, $AE = EF = FC = \frac{AC}{3}$, $E, F \in [AC]$ și $BD = CD$, $D \in [BC]$. Arătați că $m(\widehat{BED}) + m(\widehat{BFD}) < 60^\circ$.

Elefterie Petrescu

BUZĂU

I. Aflați $\overline{xyz}$ dacă $\overline{xyz} = (x + y + z)^2 + (x + y + z)$.

II. Arătați că $x^n + y^n \geq 2$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, pentru $x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

III. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 90^\circ$, iar M mijlocul lui AD . Dacă $BM \perp AC$, atunci $BD \perp MC$.

CARAȘ SEVERIN

I. Fie numerele $a = 16^2 \cdot 5^4 - 20^4 + 8$ și $b = 49^2 \cdot 4^2 - 14^4 + 7$. Calculați:

a) $S = (a - b)^1 + (a - b)^2 + (a - b)^3 + \dots + (a - b)^{2003}$;

b) $P = (a - b)^1 \cdot (a - b)^2 \cdot \dots \cdot (a - b)^{2003}$.

II. Să se arate că dacă $x, y \in \mathbb{N}^*$ și $11 \mid 3x + 5y$, atunci $11 \mid 7x + 8y$.

III. Să se arate că dacă segmentul care unește mijloacele diagonalelor unui patrulater convex este paralel cu o latură, atunci patrulaterul este trapez.

IV. În triunghiul ABC dreptunghic în A se duce bisectoarea $[BE, E \in (AC)]$ și se ia un punct F pe BC . Să se arate că $BE \perp AF$ dacă și numai dacă $EF \perp BC$.

CĂLĂRAȘI

- I. Fie triunghiul ABC oarecare, $A_1 \in BC \setminus [BC]$, $B_1 \in AC \setminus [AC]$, $C_1 \in AB \setminus [AB]$, coliniare. Arătați că

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1.$$

- II. În trapezul $ABCD$, baza mică $[AB]$ are aceeași lungime cu latura $[AD]$, iar diagonala BD este perpendiculară pe latura BC . Fie $\{O\} = AC \cap BD$ și M mijlocul lui $[BD]$. Arătați că:

1. $\frac{AB}{CD} = \frac{1}{2};$

2. $\frac{OM}{BD} = \frac{1}{6}.$

Adi Latif

- III. Fie triunghiul ABC , $AA' \perp BC$, $A' \in BC$, $[BB']$ bisectoarea $\widehat{B}$, $\widehat{B'} \in AC$, CC' mediana din C . Dacă AA' , BB' , CC' sunt concurente, atunci: $A'B = \frac{AB \cdot BC}{AB + BC}.$

Sica Furtună, Sorin Furtună

- IV. Un număr întreg “a” se numește “magic” dacă:

- are prima cifră 1;
 - următoarele cifre sunt 0 (cel puțin una);
 - numărul format cu cifrele care urmează după 0 este egal cu dublul numărului de zerouri. (exemple: 102, 10006, 10000010).
- Dați exemplul de 5 numere “magice”.
 - Dacă n este suma celor mai mari 100 de numere “magice” negative și p este suma celor mai mici 50 de numere “magice” pozitive, determinați $n + p$.

Relu Ciupea

CLUJ

- I. Diagonalele trapezului $ABCD$ ($AB \parallel CD$) se intersectează în O și $m(\widehat{AOD}) = 120^\circ$, iar $m(\widehat{ABD}) = 60^\circ$.

- Arătați că trapezul este isoscel.
- Dacă $BC = 8$ cm și M , K , L sunt respectiv mijloacele segmentelor $[DO]$, $[AO]$, $[BC]$, calculați perimetrul triunghiului MKL .

Vasile Șerdean

II. a) Fie $a = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{119}{120}$ și $b = -\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{60}}{2}$. Calculați media

aritmetică a numerelor a și b .

b) Determinați cel mai mare număr întreg mai mic decât numărul

$$x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{15} + \sqrt{21}}{\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{7}}.$$

Viorel Lușor

III. Fie $A = \left\{ x \mid x = \frac{2m-1}{2m-3}, m \in \mathbb{N} \right\}$, $B = \left\{ x \mid x = \frac{3p+1}{3p-2}, p \in \mathbb{N} \right\}$. Arătați că mulțimile

A și B sunt disjuncte (nu au nici un element comun).

IV. Fie $a = 3^{n+2} - 3^{n+1}$, $b = 3^{n+2} - 3^{n+1} + 3^n$, $c = 3^{n+1} - 3^n + 3^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculați $\frac{b+c}{a}$.

b) Stabiliți dacă a , b , c pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

Viorel Lușor

CONSTANȚA

I. Fie $a = \frac{2x^{2003} - y}{x^{2002} + 2y^2}$, unde $x = \left\{ \left| 5^{202} - 3^{303} \right| + \left[\left(-\frac{1}{5} \right)^{-2} \right]^{101} \right\} : \left[-2^2 \cdot (-1)^{-100} \right]^{303}$ și

$$y^2 = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{48 \cdot 98} + \frac{1}{49 \cdot 100}. \text{ Calculați valorile lui } a.$$

Alexandrina Dumitrache

II. Fie p un număr prim. Determinați toate numerele întregi k și n care au proprietatea ca: $n^2 + n = p^k$.

Romeo Ilie

III. Fie triunghiul ABC cu $AB < AC$ și $D \in (AB)$, $E \in (AC)$, astfel încât

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}.$$

Fie F și G proiecțiile punctelor D și E pe bisectoarea unghiului BAC și M , N mijloacele segmentelor (AD) , respectiv (AE) . Dacă $MF \cap NG = \{P\}$, arătați că:

a) triunghiul PMG este isoscel;

b) $AC = AB + 3PG$;

c) mijlocul lui AC , P și B sunt trei puncte coliniare.

Gabriela Constantin

IV. Fie triunghiul ABC cu $m(\hat{A}) = 90^\circ$, $AD \perp BC$, $D \in BC$ și $P \in (AD)$, $Q \in (DC)$. Dacă

$BP \perp AQ$, arătați că:

a) $\triangle APB \sim \triangle CQA$; b) $PQ \parallel AC$; c) $AP \cdot DC = AD \cdot QC$.